確率数理工学10

○ 確率過程

T: 時間の範囲 ($\mathbb{R}$の区間や自然数の全体)

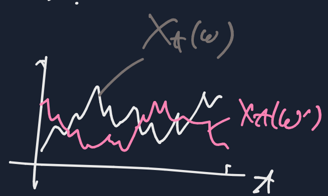
(より一般化して、$\mathbb{R}^d$ 等の位相空間を考えることも多い：時空間データ)

をインデックス集合と言う。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間

各$t \in T$に確率変数X_tが定まっているとき、

$(X_t(\omega))_{t \in T}$ を確率過程 (stochastic process) と言う。



確率過程の定義自体には、各$\omega \in \Omega$における $t \mapsto X_t(\omega)$ の連続性等の条件は入っていないことに注意する。

• 加法過程 (or 独立増分過程)

任意の $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し、

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \dots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

が独立。

もし、$X_0 = 0$ で、$Z_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ とおくと、$(Z_i)_{i=1}^n$ は独立で

$$X_{t_n} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

→ 独立な増分の和

続く。

Ex. (Brown 運動, Wiener過程)

(1) $X_0 = 0$

(2) $X_{t+s} - X_t \sim N(0, s)$ (平均0, 分散sの正規分布)

(3) $(X_t)_t$ は加法過程

(4) ほとんど全てのωで $t \mapsto X_t(\omega)$ は連続

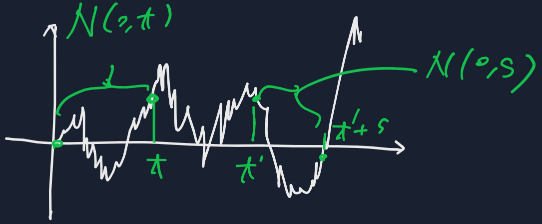
(※ (2)は t, s の取り方によらず矛盾なく仮定できる. つまり

$s = s_1 + s_2$ のとき,

$X_{t+s_1} - X_t \sim N(0, s_1)$, $X_{t+s_1+s_2} - X_{t+s_1} \sim N(0, s_2)$

であるが

$$X_{t+s} - X_t = \underline{X_{t+s_1+s_2} - X_{t+s_1}} + \underline{X_{t+s_1} - X_t} \sim N(0, \overset{s}{\overset{\|}{\underline{s_1+s_2}}})$$)



Ex. (定常ポアソン過程)

(1) $X_0 = 0$

(2) $X_{t+s} - X_t \sim Po(\lambda s)$ $({}^{\forall}s, t > 0)$

(3) $(X_t)_t$ は加法過程

※これも(2)は t, s の取り方によらず well-defined. ⟶ Poisson分布の再生性

$(Po(\lambda s) + Po(\lambda t) = Po(\lambda(s+t)))$

例えば, イベントの発生間隔が $Ex(\lambda)$ に独立に従うとき, 時刻 t までに発生するイベントの数は定常ポアソン過程に従う.

補足

$C(T)$：T上の連続関数全体の集合

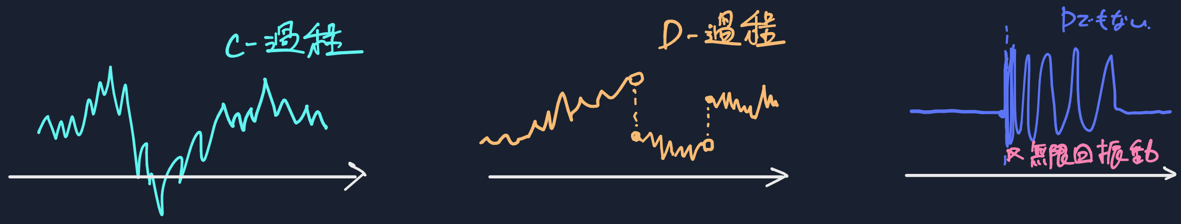
$D(T)$：T上の右連続かつ左極限の存在する関数の集合

(continue à droite, limite à gauche : cadlag)

$^{\forall}\omega \in \Omega$ で $t \mapsto X_t(\omega) \in C(T)$ （tの関数として）なら C-過程

$t \mapsto X_t(\omega) \in D(T)$ なら D-過程

と言う。



ブラウン運動はC-過程、ポアソン過程はD-過程となるように構成できる。

定理

$^{\forall}t$ で $\lim_{s \to t} P(|X_t - X_s| \geqq \varepsilon) = 0 \ (^{\forall}\varepsilon > 0)$：確率連続

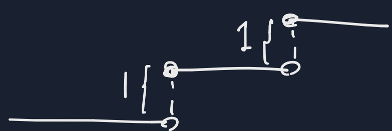
（確率収束の意味で連続）

で、かつD-過程である加法過程のことを、Levy過程という

(1) X_t が Levy過程でさらにC-過程なら $X_t - X_s \ (t > s)$ は正規分布に従う ⟶ Gauss過程

(2) X_t が Levy過程でさらに a.s. で $X_t(\omega)$ が t の関数として飛躍1で増加する階段関数なら $X_t - X_s$ は Poisson分布に従う。

⟶ Poisson過程（の特別な例）



より一般には、X_t は Gauss過程 + Poisson過程 に分解できる。

（Levy-Itoの分解）

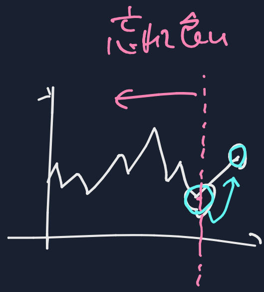
○マルコフ過程（離散時間, $T=\{1,2,3,\dots\}$）

$$P(X_{n+1}\in A \mid X_1=x_1,\dots,X_n=x_n) \qquad (A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$= \begin{cases} P(X_{n+1}\in A \mid X_n=x_n) & \longrightarrow \text{1次マルコフ} \\ P(X_{n+1}\in A \mid X_{n-1}=x_{n-1},\, X_n=x_n) & \longrightarrow \text{2次マルコフ} \end{cases}$$

<u>次の時刻の分布は直前の値のみで決まる。</u>

<u>それ以前は忘れて良い。</u>



<u>Cor</u>

マルコフ過程なら

$\forall t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_m < n$ に対し、

$$P(X_n\in A \mid X_{t_1}=x_1,\dots,X_{t_m}=x_m) = P(X_n\in A \mid X_{t_m}=x_m)$$

//

<u>Cor</u>

加法過程はマルコフ過程である。 //

注：条件付き確率は厳密には定義していないが、
部分σ-加法族を用いて厳密に定義可能である。
（正則条件付き確率）
詳しくはDurrettや、伊藤清の本を参照されたい。

○ マルコフ連鎖

Def (マルコフ連鎖)

X_n のとりうる値の範囲

離散時間、離散状態 のマルコフ過程を

マルコフ連鎖 (Markov chain) と言う

1次マルコフとする

マルコフ連鎖の遷移確率行列 (transition prob. matrix):

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(i,j) = P_{ij}$$

$$\mathbb{P} = (P(i,j))_{i,j} = (P_{ij})_{i,j}$$

$\mathbb{P}$ は n に依存しないとする $\Longrightarrow$ 斉次マルコフ (以後斉次マルコフしか考えない)

X_n の取りうる範囲を 状態空間 という

Note $P_{ij} \geq 0$, $\sum_j P_{ij} = 1$

Ex. (コイン投げ)

状態空間 = {表, 裏}

前に表が出たかどうかで投げるコインを変える.

表 → 表 : p

表 → 裏 : $1-p$

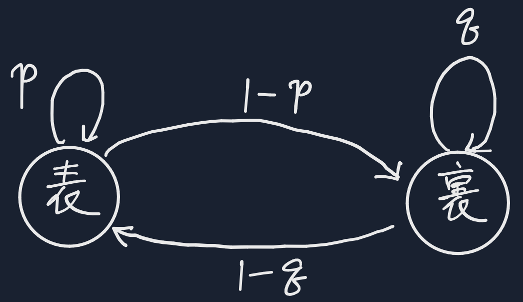
裏 → 表 : q

裏 → 裏 : $1-q$

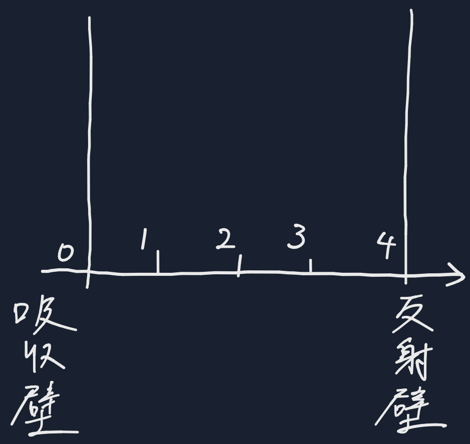
$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|cc} & 表 & 裏 \leftarrow 時刻\ n \\ \hline 表 & p & 1-p \\ 裏 & q & 1-q \\ \uparrow\ 時刻\ n-1 & & \end{array}$$

※ 方向に注意!!

左から右



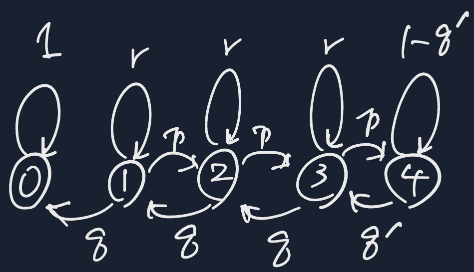
Ex. (ランダムウォーク)



0 … 吸収壁 (到達すると抜け出せない)

4 … 反射壁 (はね返される)

			確率
$i \neq 0,4$:	$i \to$	$i+1$:	p
		$i-1$:	q
		i :	$1-p-q=r$
$i=4$:	$i \to$	3 :	q'
		4 :	$1-q'$
$i=0$:	$0 \to$	0 :	1 (吸収される)
		1 :	0



$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & q' & 1-q' \end{bmatrix}$$

X_n: 時刻 n における状態

$X_n = i$, $X_{n+1} = j$: $P(i,j)$

$X_{n+2} = j$: $p^{(2)}(i,j) = P(X_{n+2}=j \mid X_n = i)$

$$= \sum_k \underbrace{P(X_{n+2}=j \mid X_{n+1}=k)}_{= P(k,j)} \underbrace{P(X_{n+1}=k \mid X_n = i)}_{= P(i,k)}$$

$$= \sum_k P(i,k)P(k,j)$$

同様にして, $p^{(m)}(i,j) \overset{\mathrm{def}}{=} P(X_{n+m}=j \mid X_n = i)$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_{m-1}} P(i,k_1)P(k_1,k_2)\cdots P(k_{m-1},j)$$

$$\boxed{\star \quad p^{(n+m)}(i,j) = \sum_k p^{(n)}(i,k)\, p^{(m)}(k,j)}$$

: Chapman-Kolmogorovの方程式

初期分布：　$P(X_0 = i) = a_i^{(0)}$ 　$(i=1,2,\cdots)$ とすると．

$$P(X_n = j) = \sum_k P(X_n = j \mid X_0 = k)\, P(X_0 = k)$$

$$= \sum_k a_k^{(0)} p^{(n)}(k,j)$$

$$a^{(n)} = a^{(0)} P^{(n)}$$

$a^{(n)} = (\underset{P(X_n=1)}{a_1^{(n)}}, \underset{P(X_n=2)}{a_2^{(n)}}, \cdots)$ ：横ベクトル

Ex.　(Bernoulli 試行)

X_n = n 回のコイン投げで表が出現した回数

状態空間 $= \{0,1,2,\cdots\}$

p：表の出る確率

$$p_{i,i+1} = p$$
$$p_{i,i} = 1-p$$
$$p_{i,j} = 0 \quad (j<i,\ j>i+1)$$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1-p & p & & 0 & \\ 1 & & 1-p & p & & \\ 2 & & & 1-p & p & \\ 3 & 0 & & & 1-p & p \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

$$\mathbb{P}^n = \begin{bmatrix} (1-p)^n & \binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p & \binom{n}{2}(1-p)^{n-2}p^2 & \cdots \\ & (1-p)^n & \binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p & \cdots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

演習問題

(1) $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ を独立に$N(0,1)$に従う確率変数であるとする。

$$X_t = tZ_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}Z_n \quad (t\in[0,1])$$

で定められる確率過程を考える。

(i) $r(t,s)=E[X_t X_s]$ を計算せよ。

(ii) X_t の周辺分布を求めよ。

(iii) $(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})$ の特性関数を求めよ。

(iv) $(X_t)_t$ が Brown 運動であることを確かめよ。（連続性は示さないで良い）

(2) 以下の生成モデルを考える：

$Z \sim Po(\lambda)$ 一様分布

$Y_i \sim U([0,1])$ を独立同一に Z 個生成

このとき、$A\in\mathcal{B}([0,1])$ に対し

$$Z(A) = \left|\{i \mid Y_i\in A\}\right| \quad (Y_i\in A \text{ なる } i\in\{1,\ldots,Z\} \text{ の個数})$$

の分布を求めよ。

(3) 各日の天気が次の遷移確率を持つマルコフ連鎖に従っているとする。

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 雨 \\ 曇 \\ 晴 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 雨 & 曇 & 晴 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

今火曜日に曇りであることが観測された時に、木曜日が雨になる確率を求めよ。